הטכניון – הפקולטה למתמטיקה
חדו"א 1מ 104018
מבחן מועד א סמסטר חורף 29.01.2016

משך המבחן שלוש שעות, ללא חומר עזר (כולל מחשבונים).
במבחן 5 שאלות. יש לפתור את כולן. יש לרשום פתרונות מנומקים, **בעט (לא אדומה)**, על גבי דפים אלו. אין לצרף מחברת נוספת או מחברת טיוטה.
שאלה 1 היא שאלת תחליף לבחן אמצע למי שזכאי לזה.

בהצלחה

שאלה 1 (20%) חשבו את הגבולות הבאים אם הם קיימים.

א. (10%)

פתרון:

$$\lim_{x\to 0}(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos(x)-1)^{\frac{1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0}(1+\cos(x)-1)^{\frac{1}{\cos(x)-1}\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)}}$$

כיוון ש-

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{\sin^2(x)} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{(L)}{=}} \lim_{x\to 0}\frac{-\sin(\mathrm{x})}{2\sin(x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos(x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(1+(\cos(x)-1))^{\frac{1}{\cos(x)-1}} = e$$

אז הגבול הוא $e^{-\frac{1}{2}}$.

ב. (10%)

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

פתרון:

$$\lim_{x\to\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}} = \lim_{x\to\infty} e^{ln(1+x^2)^{\frac{1}{\ln(x)}}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)}}$$

כיוון ש-

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x^2)}{\ln(x)} =_{\frac{0}{0}}^{(L)} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{\frac{1}{x^2}+1} = 2$$

אז הגבול הוא e^2.

שאלה 2 (20%)

א. (10%) חשבו את האינטגרל

פתרון:

$$\int \frac{x+1}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+4x+13}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4-2}{x^2+4x+13}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+13}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+13) - \int \frac{1}{(x+2)^2+9}dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln(\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}+13) - \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x+2}{3}\right) + c$$

ב. (10%) האם הטור הבא מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\,2^n}{n^n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$$

פתרון: נשתמש במבחן המנה כיוון שהאברים הם חיוביים מכיוון ש-$0 < \cos(1) \le \cos\left(\frac{1}{n}\right) < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\frac{n!\,2^n}{n^n} \cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)2}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{1}{n^n}} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = 2\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \frac{\cos\left(\frac{1}{n+1}\right)}{\cos\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{e} \cdot \frac{\cos(0)}{\cos(0)} < 1$$

כיוון ש-

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

ולכן הטור מתכנס.

שאלה 3 (20%)

א. (5%) צטטו את משפט לגרנג'.

פתרון: תהא f פונקציה רציפה בקטע הסגור $[a,b]$, גזירה בקטע הפתוח (a,b). אזי קיימת נקודה $a<c<b$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

ב. (15%) הוכיחו כי $1+x\le e^x\le 1+xe^x$ לכל x ממשי.

פתרון: נוכיח קודם כי $e^x\le 1+xe^x$.

נגדיר $f(x)=1+xe^x-e^x$. אז $f(0)=0$ וגם $f'(x)=xe^x$. לכן הנגזרת חיובית כאשר $x>0$ ושלילית כאשר $x<0$. כיוון שהפונקציה $f(x)$ רציפה לכל x אז היא עולה ממש בקטע $[0,\infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-\infty,0]$.

לכן לכל $x>0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)=0$ ולכל $x<0$ מתקיים כי $f(x)>f(0)=0$. ביחד עם $f(0)=0$ נקבל כי $f(x)\ge 0$ לכל x. כלומר $e^x\le 1+xe^x$ לכל x.

נוכיח כעת כי $1+x\le e^x$.

נגדיר $g(x)=e^x-x-1$. אז $g(0)=0$ וגם $g'(x)=e^x-1$. לכן הנגזרת חיובית כאשר $x>0$ ושלילית כאשר $x<0$. כיוון שהפונקציה $g(x)$ רציפה לכל x אז היא עולה ממש בקטע $[0,\infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-\infty,0]$.

לכן לכל $x>0$ מתקיים כי $g(x)>g(0)=0$ ולכל $x<0$ מתקיים כי $g(x)>g(0)=0$. ביחד עם $g(0)=0$ נקבל כי $g(x)\ge 0$ לכל x. כלומר $1+x\le e^x$ לכל x.

שאלה 4 (20%)

א. (12%) צטטו והוכיחו את משפט פרמה.

פתרון: ציטוט: תהי f פונקציה המוגדרת בקטע I. אם x_0 נקודה נקודה פנימית של I שהיא נקודת קיצון מקומי בה הפונקציה גזירה אז $f'(x_0) = 0$.

הוכחה: נניח כי x_0 נקודת מקסימום מקומי. אז בסביבה של x_0 מתקיים כי $f(x) \leq f(x_0)$ כלומר $f(x) - f(x_0) \leq 0$. לכן, כיוון שהפונקציה גזירה ב-x_0 אז היא שווה לנגזרות החד צדדיות שלה:

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$$

וקיבלנו כי $0 \leq f'(x_0) \leq 0$. לכן $f'(x_0) = 0$.

ב. (8%) כמה פתרונות שונים למשוואה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 = a$ עבור הערך $a = 3$? כמה פתרונות שונים למשוואה $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2 = a$ עבור הערך $a = 2.5$?

פתרון: הפונקציה גזירה מכל סדר ובפרט רציפה. בנוסף,

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x-1)(x-2)$$

ולכן הנגזרת מתאפסת כאשר $x = 0,1,2$ והיא חיובית בקטעים $(0,1), (2, \infty)$ ושלילית בקטעים $(-\infty, 0), (1,2)$. כיוון שהפונקציה גם רציפה אז היא עולה ממש בקטע $[0,1], [2, \infty)$ ויורדת ממש בקטעים $(-\infty, 0], [1,2]$.

לכן 0 היא נקודת מינימום מקומי ובה $f(0) = 2$.

1 היא נקודת מקסימום מקומי ובה $f(1) = 3$.

2 היא נקודת מינימום מקומי ובה $f(2) = 2$.

בנוסף, קל לראות כי

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

לכן, עבור $a = 3$ יש שלושה פתרונות ועבור $a = 2.5$ יש ארבעה פתרונות.

שאלה 5 (20%)

א. (10%) חשבו $\sqrt[4]{17}$ ברמת דיוק $\frac{1}{1000}$.

פתרון: נפתח פולינום טיילור של $f(x)=x^{\frac{1}{4}}$ סביב $a=16$. נשים לב כי בשארית $R_n(17)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(17-16)$ יש לנו כי $16<c<17$. לכן לכל חזקה חיובית p מתקיים כי $\frac{1}{c^{\frac{p}{4}}}<\frac{1}{16^{\frac{p}{4}}}=\frac{1}{2^p}$.

$$f(x)=x^{\frac{1}{4}} \qquad f(16)=2$$

$$f'(x)=\frac{1}{4x^{\frac{3}{4}}} \qquad f'(16)=\frac{1}{4\cdot 2^3}=\frac{1}{32} \qquad |R_0(17)|=|f'(c)||17-16|\le\frac{1}{32}$$

$$f''(x)=-\frac{3}{16x^{\frac{7}{4}}} \qquad f''(16)=-\frac{3}{16\cdot 2^7}=-\frac{3}{2048} \qquad |R_1(17)|=\frac{1}{2!}\cdot|f''(c)||17-16|\le$$
$$\le\frac{3}{2\cdot 2048}<\frac{1}{1000}$$

לכן

$$T_1(x)=2+\frac{1}{32}(x-16)$$

ואז

$$T_1(17)=2+\frac{1}{32}(17-16)=2+\frac{1}{32}$$

נותן לנו את $\sqrt[4]{17}$ ברמת דיוק $\frac{1}{1000}$.

ב. (10%) נתון כי $f(x), g(x)$ פונקציות גזירות ועולות ממש על כל הישר המקיימות

$f(0) = g(0) = 0$. נגדיר $h(x) = \int_{-1}^{g(x)} f(t)dt$.

1. מצאו את $h'(x)$.

פתרון: כיוון ש-$g(x)$ גזירה ו-$f(x)$ רציפה (כי גזירה) אז לפי המשפט היסודי וכלל השרשרת

$$h'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$$

2. הוכיחו כי $h(x)$ עולה ממש בקטע $[0, \infty)$ ויורדת ממש בקטע $(-\infty, 0]$.

פתרון: $g(x)$ עולה ממש וגם $g(0) = 0$ ולכן עבור $x > 0$ מתקיים כי $g(x) > 0$ ועבור $x < 0$ מתקיים כי $g(x) < 0$. כנ"ל עבור $f(x)$. לכן עבור $x > 0$ מתקיים כי $g(x) > 0$ ולכן $f\big(g(x)\big) > 0$ ועבור $x < 0$ מתקיים כי $g(x) < 0$ ולכן $f\big(g(x)\big) < 0$.

בנוסף כיוון ש-$g(x)$ עולה אז $g'(x) \geq 0$.

לכן, $h'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$ אי שלילי כאשר $x \geq 0$ ואי חיובי כאשר $x \leq 0$. כיוון ש-$h(x)$ רציפה זה אומר כי $h(x)$ עולה בקטע $[0, \infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty, 0]$.

3. הוכיחו כי $x = 0$ מינימום מוחלט של הפונקציה $h(x) = \int_{-1}^{g(x)} f(t)dt$.

פתרון: כיוון ש-$h(x)$ עולה בקטע $[0, \infty)$ ויורדת בקטע $(-\infty, 0]$, אז עבור $x > 0$ מתקיים כי $h(x) \geq h(0)$, ועבור $x < 0$ מתקיים כי $h(x) \geq h(0)$. זה אומר כי 0 נקודת מינימום.